1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$ donde,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & m & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & m \\ -2 & 0 & 0 & 2-m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Discutir el sistema según los valores del parámetro m. Resolver el sistema anterior para $m = 3$.

$A \in M_4(\mathbb{R}) \qquad rg(A) \leq 4$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & m & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 3-m \end{vmatrix} = (-1)^{4+4}(3-m)\begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$F_4 \leftrightarrow F_4 + F_2$

$= (3-m)(2m-6) =$

$= 2(3-m)(m-3) = 0$

$3-m=0 \qquad m-3=0$

$m=3$

$$\boxed{rg(A) = \begin{cases} 4 & \dots\ m \neq 3 \\ 3 & \dots\ m = 3 \end{cases}}$$

$m=3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3-1-18 \underset{\|}{} -22 \neq 0$$

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & m & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & m & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2-m & 2 \end{array}\right) \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

$rg(A|b) \leq 4$

- Si $m \neq 3$, $\exists$ el menor de orden 4 dado por la matriz A que es regular $\Rightarrow$ $rg(A|b) = 4$

- Si $m=3$

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Es un menor regular, con det $\neq 0$

$rg(A|b) = 3$

$$rg(A|b) = \begin{cases} 4 & \cdots\ m \neq 3 \\ 3 & \cdots\ m = 3 \end{cases}$$

Discusión:

- Si $m \neq 3$, $rg(A) = 4 = rg(A|b) = n^\circ$ incognitas
  $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado
- Si $m = 3$, $rg(A) = 3 = rg(A|b) < n^\circ$ incognitas
  $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterm.

Resolución para $m = 3$

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y + 3z = 2 \\ 2x + t = -2 \\ -x + y + z + 3t = 2 \\ -2x - t = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \to t = -2 - 2x \qquad \boxed{t = 0} \\ \to -x + y + z + 3(-2-2x) = 2 \\ \quad -7x + y + z = 8 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + 3z = 2 \\ -3(-7x + y + z = 8) \end{array}\right\} + \quad \begin{array}{r} x + \cancel{3y} + \cancel{3z} = 2 \\ 21x - \cancel{3y} - \cancel{3z} = -24 \\ \hline 22x \qquad = -22 \end{array} \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$-1 + 3y + 3z = 2 \Rightarrow 3y + 3z = 3 \Rightarrow y + z = 1$$

$y = 1 - \lambda$

$z = \lambda$

$$\boxed{\text{Solución: } (-1,\ 1-\lambda,\ \lambda,\ 0)}$$